Ispitivanje funkcije pomoću izvoda

Monotonost funkcije

Napomenimo još jednom, da je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) na intervalu (a,b), ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in (a,b)$ iz nejednakosti $x_1 < x_2$ slijedi nejednakost $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Rastuća, odnosno opadajuća funkcija nazivaju se monotonim funkcijama.

Teorema (potreban uslov) Ako je diferencijabilna na intervalu (a,b) funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) na tom intervalu, onda je $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ za svako $x \in (a,b)$

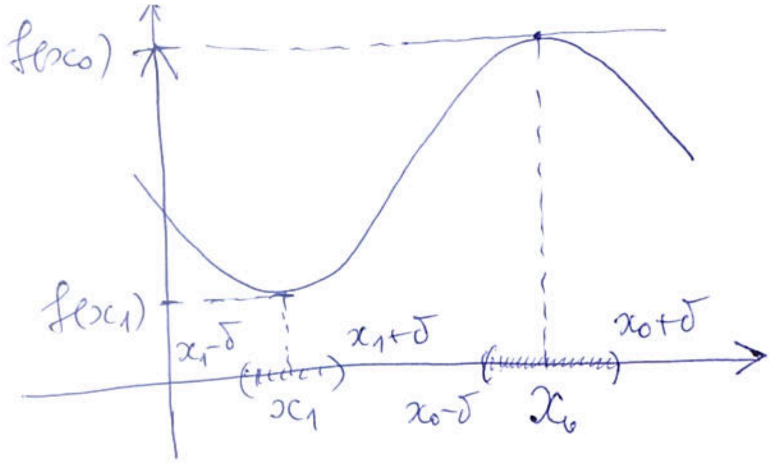
Teorema (dovoljan uslov monotonosti) Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna na intervalu (a,b) i ako je $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ za svako $x \in (a,b)$, onda je funkcija $f(x)$ rastuća (opadajuća) na intervalu (a,b).

Ekstremne vrijednosti funkcije

Definicija Tačka x_0 je tačka lokalnog minimuma (maksimuma) funkcije funkcije $f(x)$, ako postoji δ-okolina, $U_\delta(x_0)$, tačke x_0, takva da za svako $x \in U_\delta(x_0)$ važi da je

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)).$$

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se nazivaju tačkama lokalnog ekstremuma, a vrijednosti u tim tačkama lokalnim ekstremumima.



<u>Teorema (Fermaova teorema)</u> Neka je funkcija $f(x)$ definisana na nekom intervalu (a,b) i neka u tački $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstremum. Tada, ako u tački x_0 postoji izvod $f'(x_0)$, onda je $f'(x_0)=0$.

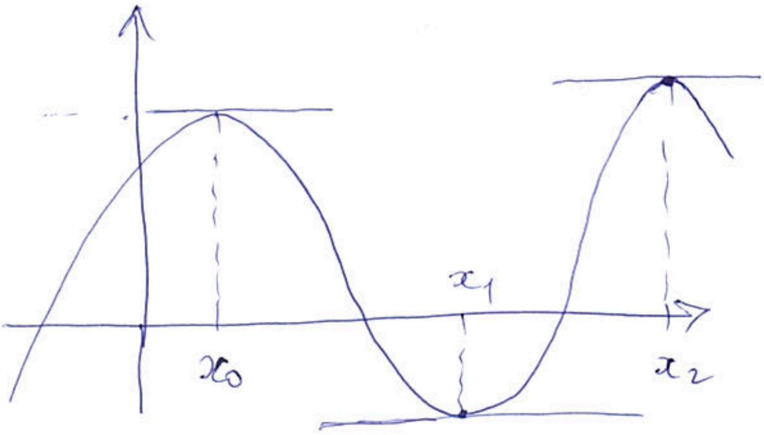
Znači, Fermaova teorema kaže da ako postoji izvod u tački u kojoj funkcija ima lokalni ekstremum, onda je izvod u toj tački jednak nuli.

Takve tačke nazivamo stacionarnim tačkama.

Razmotrimo sada uslove postojanja ekstremuma funkcije:

<u>Teorema (potreban uslov)</u> Ako funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima lokalni ekstremum, onda je ili $f'(x_0)=0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji ili $f'(x_0)$ jednako beskonačnosti.

Geometrijski smisao ove teoreme je da, ukoliko u x_0 funkcija ima ekstremum i x_0 je stacionarna tačka, onda je tangenta na grafik funkcije u toj tački paralelna x-osi.



Teorema (dovoljan uslov ekstremuma)

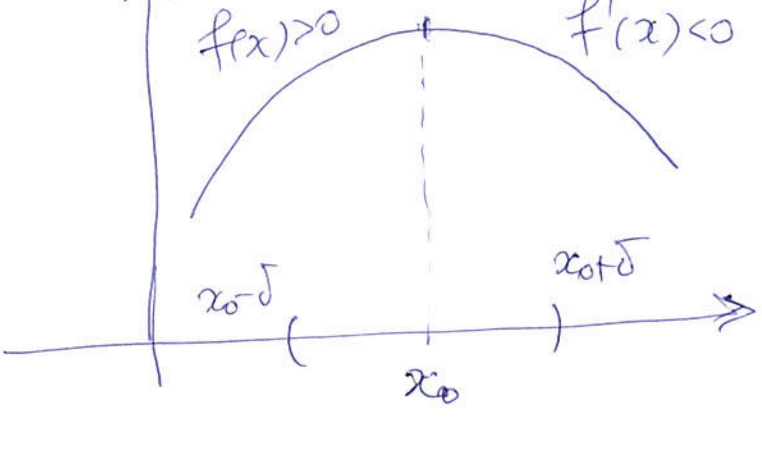
Neka je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0, sa izuzetkom možda same tačke x_0 u kojoj je neprekidna. Tada ako je:

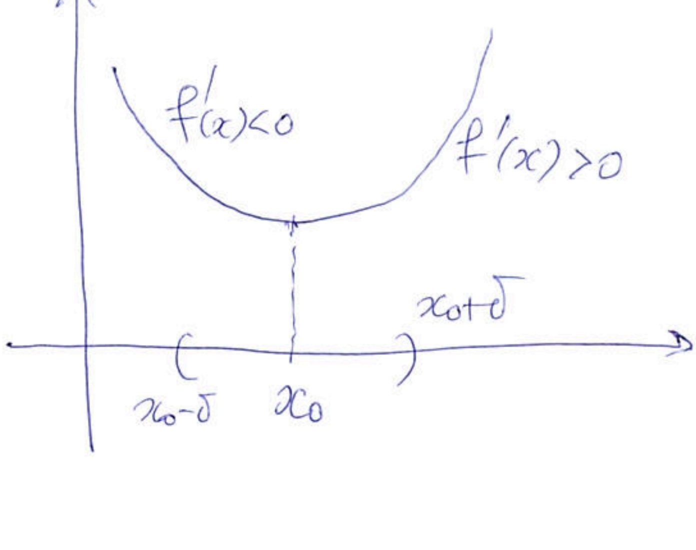
$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0) \quad \text{za} \quad x < x_0$$

$$f'(x) \leq 0 \quad (f'(x) \geq 0) \quad \text{za} \quad x > x_0$$

onda je x_0 tačka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije $f(x)$.

Grafička interpretacija ove teoreme je data na slici:





Primjer Nađi ekstremume funkcije $f(x)=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x^2}$

Rješenje Očigledno je oblast definisanosti (domen) ove funkcije $D=\mathbb{R}$. Nađimo $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}}$$

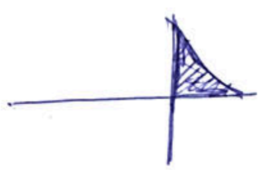
Izvod ne postoji za $x_1=0$, a jednak je nuli za $x_2=8$. ($\sqrt[3]{x}-2=0$). Ove dvije tacke će razbiti oblast definisanosti funkcije na tri intervala $(-\infty,0),(0,8)$ i $(8,+\infty)$. Pogledajmo iz tablice ponašanje izvoda na ovim intervalima (znak izvoda) i na osnovu toga odredimo intervale monotonosti:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,8)$	8	$(8,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	LOK MAX	$\searrow$	LOK MIN	$\nearrow$

Slijedi da je $x_1=0$ tacka lokalnog maksimuma, a $x_2=8$ tacka lokalnog minimuma funkcije $f(x)$.

$$f_{max}=f(0)=0$$

$$f_{min}=f(8)=-\frac{4}{3}$$



Nekada je lakše koristiti drugi dovoljan uslov ekstremuma funkcije.

Teorema (dovoljan uslov ekstremuma)

Neka je x_0 stacionarna tačka dvaput diferencijabilne funkcije $f(x)$ i neka je $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$). Tada u tački x_0 funkcija $f(x)$ ima lokalni minimum (maksimum).

Znači, u tački x_0 je $f'(x_0)=0$.

Primjer Naći ekstremume funkcije $f(x)=x^2(x-2)^2$.

Rješenje Jasno je da je domen funkcije $D=\mathbb{R}$.

Nađimo njen prvi izvod:

$$f'(x)=4x(x-1)(x-2)$$

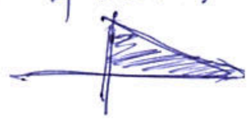
$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$ su stacionarne tačke funkcije, tj tačke u kojima je $f'(x)=0$.

Nađimo, $f''(x)=4(3x^2-6x+2)$

$f''(x_1)=f''(0)=8>0$, znači $x_1=0$ je tačka lokalnog minimuma $f(x_1)=f(0)=0=f_{min}$

$f''(x_2)=f''(1)=-4<0$, slijedi da je $x_1=1$ tačka lokalnog maksimuma, $f(x_2)=f(1)=1=f_{max}$

$f''(x_3)=f''(2)=8>0$, slijedi da je $x_3=2$ tačka lokalnog minimuma, tj $f(x_3)=f(2)=0=f_{min}$.



Najveća i najmanja vrijednost funkcije na segmentu (zatvorenom intervalu)

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na zatvorenom intervalu (segmentu) $[a, b]$. Tada, po Vajerštrasovoj teoremi, ova funkcija dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost na tom segmentu. Te vrijednosti mogu da budu ili u nekoj unutrašnjoj tački $x_0 \in (a,b)$ (segmenta $[a,b]$) ili na krajevima $x_0 = a$ ili $x_0 = b$. Ako je $x_0 \in (a,b)$, onda x_0 moramo prikazati kao kritičnu tačku date funkcije.

Znači, najmanju i najveću vrijednost funkcije na segmentu $[a,b]$ tražimo na sljedeći način:

1) Nađemo kritične tačke na intervalu (a,b) (znači tačke u kojima je $f'(x)=0$ ili u kojima $f'(x)$ ne postoji)

2) Izračunamo vrijednosti funkcije u nađenim tačkama i vrijednosti funkcije u krajevima zatvorenog intervala $x = a$ i $x = b$.

3) Među svim izračunatim vrijednostima funkcije je izabrati najveću i najmanju vrijednost.

Ukoliko funkcija $f(x)$ nema kritičnih (stacionarnih) tačaka na intervalu (a,b) onda je ova monotona na tom intervalu (rastuća ili opadajuća)

Primjer Naći najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ na segmentu $[-2,1]$.

Rješenje Nađimo prvi izvod funkcije.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

Tada je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -1 \in [-2,1]$ i za $x_2 = 0 \in [-2,1]$

Dalje je, $f(0) = 1$, $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$, a $f(-2) =$
$= 48 - 32 + 1 = 17$ i $f(1) = 8$.

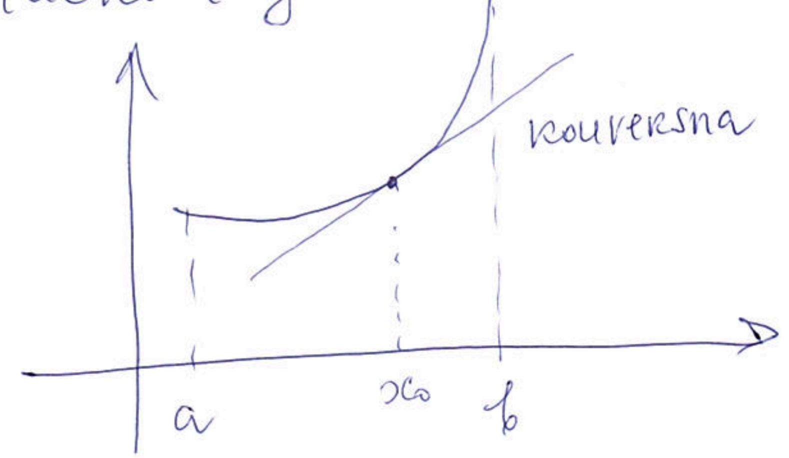
Odavde imamo da je

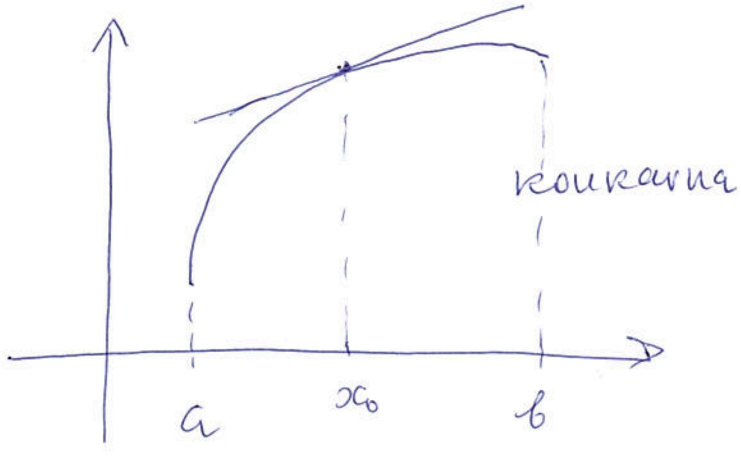
$$f_{max} = f(-2) = 17, \text{ a } f_{min} = f(-1) = 0.$$

Znači, funkcija $f(x)$ u tački $x = -2$ dostiže svoju najveću vrijednost, a u tački $x = -1$ svoju najmanju vrijednost na segmentu $[-2,1]$.

Konveksnost i konkavnost funkcije

Definicija Diferencijabilna funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) na intervalu (a,b), ako je grafik funkcije $y = f(x)$ iznad (ispod) svake tangente na grafik funkcije u svakoj tački tog intervala





Intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije odredjujemo pomoću sljedeće teoreme.

<u>Teorema</u> Ako je funkcija $f(x)$ dvaput neprekidno-diferencijabilna na intervalu (a,b) i ako je $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ u svakoj tacki tog intervala, onda je funkcija $f(x)$ konveksna (konkavna) na intervalu (a,b).

<u>Definicija</u> Tacka $x_0 \in (a,b)$ je prevojna tacka neprekidne funkcije $f(x)$ ako u toj tacki funkcija $f(x)$ mijenja konveksnost, tj. ako postoji δ-okolina tacke x_0, $U_\delta(x_0)$, takva da je za sve $x \in (x_0-\delta, x_0)$ funkcija konveksna, a za sve $x \in (x_0, x_0+\delta)$ funkcija konkavna ili obrnuto.

Za traženje prevojne tacke koriste se sljedeće teoreme.

<u>Teorema</u> (potreban uslov prevoja) Neka je x_0 prevojna tacka funkcije $f(x)$. Tada ili $f''(x_0)$ ne postoji ili je $f''(x_0)=0$.

<u>Teorema</u> (dovoljan uslov prevoja) Neka je funkcija $f(x)$ dvaput diferencijabilna funkcija u nekoj okolini tacke x_0, a u samoj tacki x_0 može biti samo neprekidna i neka je

$$f''(x)<0 \quad (f''(x)>0) \quad \text{za } x<x_0$$
$$f''(x)>0 \quad (f''(x)<0) \quad \text{za } x>x_0$$

onda je x_0 prevojna tacka funkcije $f(x)$.

Teorema (Dovoljan uslov prevoja)
Neka je $f(x)$ triput neprekidno-diferencijabilna funkcija u tački x_0 i neka je $f''(x_0)=0$, a $f'''(x_0)\neq 0$. Tada je x_0 prevojna tačka funkcije $f(x)$.

Primjer Naći intervale konveksnosti i tačke prevoja funkcije $f(x)=x^5-x+5$

Rješenje $f'(x)=5x^4-1$, $f''(x)=20x^3$.
Drugi izvod postoji za svako $x\in\mathbb{R}$. Vidimo da je $f''(x)=0$ za $x=0$.
Primijetimo da je $f''(x)>0$ za svako $x>0$, a $f''(x)<0$ za svako $x<0$.
Slijedi da je $x=0$ prevojna tačka funkcije $f(x)$, a funkcija $f(x)=x^5-x+5$ je konveksna na intervalu $(0,+\infty)$, odnosno konkavna na intervalu $(-\infty,0)$.

Asimptote grafika funkcije

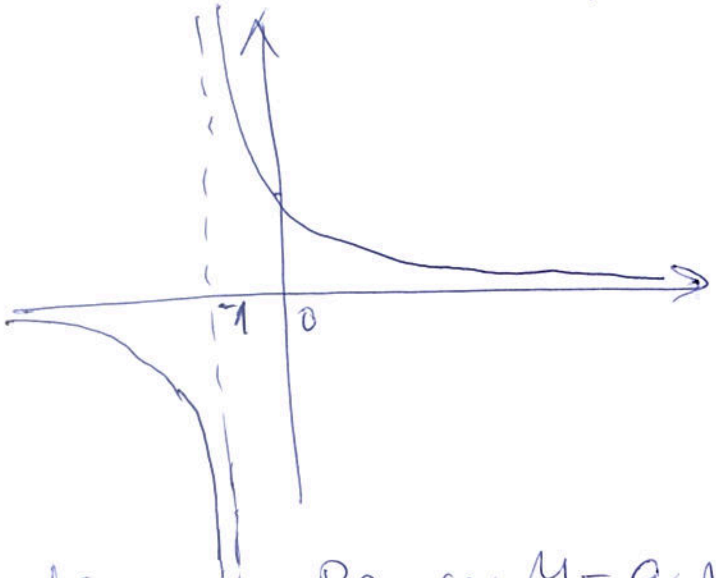
Definicija Prava $x=x_0$ je vertikalna asimptota grafika funkcije $f(x)$, ako je bar jedna od graničnih vrijednosti $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ ili $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ jednaka beskonačnosti.

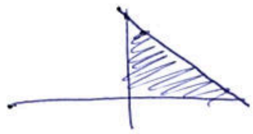
Primjer Naći vertikalnu asimptotu funkcije

$f(x)=\frac{2}{x+1}$.

Rješenje Ova funkcija ima vertikalnu asimptotu

$x=-1$, jer je $\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{2}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0}\frac{2}{x-1}=-\infty$.





Definicija Prava $y=a$ je horizontalna asimptota grafika funkcije $y=f(x)$ ako je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$. Specijalno, ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ onda je desna horizontalna asimptota, a ako je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, onda je lijeva horizontalna asimptota.

Primjer $f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$, $y=1$ je horizontalna asimptota grafika funkcije $y=f(x)$.

Definicija Prava $y=kx+b$ je kosa asimptota grafika funkcije $y=f(x)$ kad $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ ako je $f(x)=kx+b+\alpha(x)$,

gdje je $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}}\alpha(x)=0$.

Odavde je,

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} - \frac{b}{x} \Big/ \lim_{x\to\infty}$$

dobijamo, $\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$

jer je $\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0$ i $\lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$.

Iz jednakosti $b = f(x) - kx - \alpha(x) \Big/ \lim_{x\to\infty}$

dobijamo da je $\boxed{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}$

Opšta shema za ispitivanje toka funkcije

Ispitujemo sljedeće:

1) Oblast definisanosti funkcije
2) Periodičnost, parnost i neparnost funkcije
3) Monotonost funkcije i ekstremne vrijednosti
4) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke
5) Asimptote grafika funkcije
6) Presjeke sa koordinatnim osama
7) Crtamo grafik funkcije

Primjer Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

Rješenje 1) Domen funkcije je $D = \mathbb{R}$

2) Funkcija nije periodična jer je $f(x+T) \neq f(x)$

Funkcija takođe nije ni parna ni neparna, jer je

$$f(-x) = \sqrt[3]{(3-x)x^2} \neq -f(x) = -\sqrt[3]{(x+3)x^2}$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{(3-x)x^2} \neq f(x) = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$$

3) Monotonost funkcije i ekstremne vrijednosti.

Nađimo prvi izvod funkcije:

$$f'(x) = \left((x+3)^{1/3} \cdot x^{2/3}\right)' = \frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x+3)^{1/3} \cdot x^{-1/3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}} + \frac{2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{x+2(x+3)}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}} =$$

$$= \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 \cdot x}}. \text{ Znači, } f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}}$$

$f'(x) = 0$ za $x = -2$, a u tačkama $x = -3$ i $x = 0$ $f'(x)$ ne postoji. Znači, potencijalne tačke ekstremuma funkcije su $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ i $x_3 = 0$. Ove tri tačke dijele oblast definisanosti na intervale $(-\infty, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, 0)$ i $(0, +\infty)$. Razmotrimo monotonost funkcije na ovim intervalima:

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$+\infty$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	MAX $\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	MIN 0	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = -2$, $f(-2) = \sqrt[3]{4}$, a lokalni minimum u $x = 0$, $f(0) = 0$.

4) Konveksnost i konkavnost funkcije.

Nađimo drugi izvod funkcije $f(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2 x}}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2} - (x+2)\left(\sqrt[3]{x(x+3)^2}\right)'}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}}$$

Nađimo $\left(\sqrt[3]{x(x+3)^2}\right)' = \left(x^{1/3}\cdot(x+3)^{2/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x+3)^{2/3} +$

$$+\frac{2}{3}(x+3)^{-1/3}x^{1/3} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+3)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{x+3+2x}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}.$$

Dalje imamo da je

$$f''(x) = \frac{\sqrt[3]{x(x+3)^2} - (x+2)\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}}{\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}} = \frac{x(x+3)-(x+1)(x+2)}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}} =$$

$$= \frac{x^2+3x-x^2-3x-2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$$

Znači, $f''(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$.

U tačkama $x_1=-3$ i $x_2=0$ drugi izvod funkcije $f''(x)$ nije definisan. Ove tačke dijele oblast definisanosti funkcije na intervale $(-\infty,-3)$, $(-3,0)$ i $(0,+\infty)$. Razmotrimo konveksnost funkcije na ovim intervalima.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	∞	$-$	∞	$-$
$f(x)$	$\cup$	PREVOJ	$\cap$	NIJE PREVOJ	$\cap$
	KONVEKSNA		KONKAVNA		KONKAVNA

Tačka $x=-3$ je prevojna tačka funkcije.

5) Asimptote grafika funkcije

Nema vertikalnih asimptota funkcije

Pošto je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, znači da nema ni horizontalnih asimptota.

Ispitajmo da li postoje kose asimptote grafika funkcije.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}{x}=\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2}{x^3}}=1$$

$\boxed{k=1}$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x+3)}-x\right)=\cancel{\lim}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2(x+3)}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}+x\sqrt[3]{x^2(x+3)}+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}+x\sqrt[3]{x^2(x+3)}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}+x\sqrt[3]{x^2(x+3)}+x^2}=1$$

Prava $y=x+1$ je kosa asimptota funkcije kad $x\to+\infty$ i kad $x\to-\infty$.

6) Jasno je da je $f(x)=0$ za $x=-3$ i $x=0$.

7) grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$

$\boxed{74}$